Hegel und das Differentialkalkül

Welche Rolle spielen die Anmerkungen zum Differentialkalkül bei der Entwicklung der Kategorien in der „Logik”?

An der Universität Leipzig,
Fakultät für Sozialwissenschaften und Philosophie,
Institut für Philosophie,
im Bachelor Philosophie eingereichte

Bachelorarbeit

Zur Erlangung des akademischen Grades eines
Bachelor of Arts

Vorgelegt von
Jakob Moritz
Geboren am 11.09.1998 in München
3710468

Erstgutachter: Prof. Dr. Sebastian Rödl
Zweitgutachter: Prof. Dr. Ingolf Max

Eingereicht am: 07.09.2021

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Hegels „Wissenschaft der Logik" beansprucht, die Kategorien des reinen Denkens, welche zugleich die Kategorien der wirklichen Welt sind, zu entwickeln. Ausgehend vom Sein, dem allgemeinsten aller Begriffe, werden Stück für Stück, gemäß der von Hegel gewählten Methode der Dialektik, die Kategorien erörtert und untersucht, welche unser Denken und die Wirklichkeit selbst strukturieren. Entlang dieses „Hauptpfades" der Kategorienentwicklung finden sich viele Anmerkungen, in welchen Hegel seine Ergebnisse zu verschiedenen wissenschaftlichen Erkenntnissen und zu den Werken anderer Philosophen in Beziehung setzt. Besonders ins Auge springt dabei ein Exkurs zum Differentialkalkül, welcher sich in der zweiten Auflage der „Logik" über drei Anmerkungen erstreckt und beinahe ein Viertel des ersten Teils der „Wissenschaft der Logik" einnimmt. Schon in Anbetracht seiner Fülle stellt sich die Frage, welche Rolle diesem Exkurs zukommt: Präsentiert Hegel hier eine originär mathematische Erkenntnis zur Grundlegung der Differentialrechnung? Wird das Eigentümliche der Differentialrechnung durch die Kategorien der „Logik" erhellt oder sollen diese umgekehrt durch das Differentialkalkül, sozusagen als „praktisches Beispiel", für Leser*innen verständlicher gemacht werden? In dieser Arbeit wird untersucht, welche Rolle die Anmerkungen zum Differentialkalkül für die Entwicklung der Kategorien spielen. Zu diesem Zweck wird zunächst das eigentliche Projekt vorgestellt, welches Hegel in der „Wissenschaft der Logik" verfolgt: Die Entwicklung der Kategorien des reinen Denkens. Diese werden von Hegel aber nicht lose aufgezählt, sondern gemäß einer besonderen Methode, der Dialektik, begrifflich aus sich selbst entwickelt. x Darstellung von Projekt und Methode der „Wissenschaft der Logik" bilden den ersten Teil dieser Arbeit. Innerhalb der Entwicklung der Kategorien stehen die Anmerkungen zum Differentialkalkül an ganz bestimmter Stelle, nämlich im Anschluss an die Kategorie der quantitativen Unendlichkeit. Was es mit diesem Begriff auf sich hat und wie er in Beziehung zu den zuvor entwickelten Kategorien, insbesondere der qualitativen Unendlichkeit, steht, soll im zweiten Teil dieser Arbeit dargestellt werden, um den Kontext und die verwendeten Begrifflichkeiten der drei Anmerkungen verständlich zu machen. Hierauf folgt als dritter Teil die Diskussion der Hegel'schen Behandlung des Differentialkalküls, um diese anschließend, im vierten Teil, in ihrer Rolle für die Entwicklung der Kategorien einordnen zu können.

2 Projekt und Methode der „Wissenschaft der Logik"

Worum geht es in der „Wissenschaft der Logik"? „Darauf gibt es eine im Rahmen der philosophischen Tradition recht gut abgesicherte Antwort: Hegels Logik handelt von Kategorien".[1] Um jedoch untersuchen zu können, was Hegel unter einer Kategorie versteht, ist es hilfreich, zunächst kurz auf die Rolle dieses Konzeptes in den Texten von Aristoteles und Kant einzugehen. Das Konzept der Kategorie weist eine reichhaltige Geschichte auf und insbesondere durch die Kritik Kants an Aristoteles und durch Hegels Kritik an allen

[1] Kreis, *Negative Dialektik des Unendlichen: Kant, Hegel, Cantor*, S.169.

beiden kann versucht werden, das Eigentümliche der Hegel'schen Konzeption herauszustellen. Die Kategorien nach Aristoteles sind in erster Linie Weisen des Aussagens von dem, was es gibt.[2] Eine dieser Weisen wäre beispielsweise, zu sagen, etwas sei zehn Kilo schwer. Eine andere Weise hingegen, etwas sei grün. Bei Aristoteles heißen diese Aussageweisen das Wie-viel und das Wie-Beschaffen, woraus in der lateinischen Tradition dann Quantität und Qualität werden.[3] Die Aristotelischen Kategorien geben also an, auf welche Arten von einer zugrunde gelegten Sache etwas ausgesagt werden kann. Das altgriechische Wort für Kategorie lautet $\kappa\alpha\tau\eta\gamma\sigma\rho\iota\alpha$ (gespr. kategoria), was zu Aristoteles Zeit zunächst „Anklage" hieß und später mit „Prädikat" übersetzt wurde. Daher scheint es zunächst nahe zu liegen, in Aristoteles Kategorien primär Arten von linguistischen Prädikaten zu sehen. Es gibt jedoch gute Gründe dafür, davon auszugehen, dass Aristoteles in den Kategorien nicht lediglich Strukturen der Sprache, sondern auch der Gegenstände in der Welt sah.[4] In jedem Fall kann die Frage gestellt werden, nach welchem Prinzip Aristoteles die Kategorien aufstellt. Hierzu äußert er sich er sich selbst nicht gerade ausführlich, weshalb Forscher*innen verschiedene Möglichkeiten ausgearbeitet haben, nach welchem Prinzip Aristoteles vorgegangen sein könnte.[5] Bekannt ist beispielsweise der Frage-Ansatz von J.L. Ackrill, bei welchem durch die metaphysische Grundfrage „Was ist es?", auf Gegenstände oder ihre Eigenschaften angewendet, zu den höchsten Arten der Gattungen derselbigen fortgeschritten wird. Obwohl in dieser hypothetischen Methode der Kategorien-Entwicklung die Frage im Mittelpunkt steht, lehnt Ackrill eine rein linguistische Interpretation der Kategorien ab: „Aristoteles stützt sich stark auf sprachliche Fakten und Tests, aber sein Ziel ist es, Wahrheiten über nicht-sprachliche Dinge zu entdecken".[6] So wird insbesondere in Abgrenzung zu anderen Philosophen bei der Aristotelischen Konzeption auch von einem Kategorien-Realismus gesprochen.[7]

Während für manche Forscher*innen also ein Prinzip vorstellbar ist, nach welchem Aristoteles die Kategorien entwickelt haben könnte, sah Kant die Methode von Aristoteles kritischer: „Da er aber kein Principium hatte, so raffte er sie [die Kategorien] auf, wie sie ihm aufstießen" (A 81/B 106 f.). Im Gegensatz zu Aristoteles steht Kant für eine Systematisierung der Kategorien. Sie treten bei ihm zu dem Zweck zusammen, durch „Urteilen mögliche Gegenstände erkennen zu können".[8] Dementsprechend leitet Kant die Kategorien aus den Urteilsformen her (A70/B95 - A93/B109). In erster Linie werden die Kategorien so zu Formen des Verstehens, die aber dennoch ontologische Relevanz haben, da sie die Gegenstände des Wissens überhaupt erst möglich machen.[9]

Obwohl Kant die Kategorien systematisiert, bleibt ein Element der Arbitrarität bestehen. Er schreibt selbst: „Von der Eigentümlichkeit unseres Verstandes aber, nur vermittelst der Kategorien und nur gerade durch diese Art und Zahl derselben Einheit der Apperzeption a priori zustande zu bringen, läßt sich ebenso wenig ferner ein Grund angeben,

[2]vgl. Kreis, *Negative Dialektik des Unendlichen: Kant, Hegel, Cantor*, S.170.
[3]vgl. ebd., S.170.
[4]Studtmann, "Aristotle's Categories", §2.1.
[5]Ebd., §3.
[6]Ackrill, *Aristotle: Categories and De Interpretatione*, S.71.
[7]Thomasson, "Categories", §1.
[8]Kreis, *Negative Dialektik des Unendlichen: Kant, Hegel, Cantor*, S.174.
[9]vgl. Thomasson, "Categories", §1.2.

als warum wir gerade diese und keine anderen Funktionen zu Urteilen haben" (B 145 f.). Hier stellt sich allerdingsdie Frage, ob sich die Grundstrukturen des Denkens überhaupt anhand von Urteilen gewinnen lassen können und ob Urteile nicht möglicherweise auch andere Formen annehmen können, als die von Kant dargelegten, welche dieser aus der Tradition der Logik aufgegriffen hat.[10] Dies ist eine der grundlegenden Punkte, in denen sich Hegels Ansatz von der kantischen Kategorienlehre unterscheidet: Hegel stellt klar, dass „die Alternativlosigkeit des Urteils im allgemeinen und die spezifische Ausdifferenzierung der Formen des Urteils im besonderen [...] einer eigenen theoretischen Legitimation bedürfen".[11] Doch wie lässt sich sicherstellen, dass das Projekt der Untersuchung und Darlegung der Kategorien nicht von Auffassungen über Urteilsformen, die möglicherweise zeitlich kontingent sind, korrumpiert wird? Es ergeben sich neue Anforderungen an das Prinzip, nach denen die Kategorien entwickelt werden: „Die Kategorientheorie bedarf einer voraussetzungslosen, genuinen nur ihr selbst eigentümlichen und gänzlich aus ihr selbst entwickelten Methode".[12] Diese Methode nun ist die positive Dialektik: Die Kategorien sollen „eine nach der anderen auseinander entwickelt werden".[13] Aus dem begrifflichen Gehalt einer Kategorie ergibt sich die nächste Kategorie, bzw. genauer aus dem Widerspruch, welcher diesem begrifflichen Gehalt innewohnt und durch die nächste Kategorie aufgelöst wird. „In diesem Wege hat sich das System der Begriffe überhaupt zu bilden – und in unaufhaltsamem, reinem, von außen nichts hereinnehmendem Gange sich zu vollenden" (W V 49)[14]. Die Dialektik Hegels ist also eine voraussetzungslose und immanente Methode. Das bedeutet, dass die Methode „von ihrem Gegenstande und Inhalte nichts unterschiedenes ist – denn es ist der Inhalt in sich, *die Dialektik, die er an ihm selbst hat*, welche ihn fortbewegt" (W V 50). Da die Dialektik als Methode also der Dialektik der Kategorien selbst entspricht, bleibt das Bild von dieser Methode notwendigerweise vage, bevor es in der Entwicklung der Kategorien konkret gemacht wird.

Es bietet sich an, die ersten drei Begriffe zu Beginn der „Wissenschaft der Logik" als Ausgestaltung der Methode der Dialektik zu deren besseren Verständnis heranzuziehen. Der Begriff, mit welchem die „Wissenschaft der Logik" ihre Untersuchungen beginnt, ist „*Sein, reines Sein,* - ohne alle weitere Bestimmung" (W V 82). Als unbestimmter Begriff ist „Sein" nicht in Beziehung zu irgendeinem anderen Begriff definiert und ist daher vollkommen unmittelbar.[15] Es handelt sich also um einen Begriff von „reiner Präsenz", wobei die Art und Weise dieser Präsenz nicht weiter spezifiziert ist.[16] Eine mögliche Explikation dieses Begriffs wäre auch, ihn mit der Konzeption des Frege'schen Urteilsstrichs in Verbindung zu bringen: Dieser drückt aus, dass etwas als wahr geurteilt wird - ist jedoch vollkommen indifferent gegenüber dem Inhalt.[17] Urteil p sagt nichts darüber aus, ob das Urteil *nicht* p ausgeschlossen ist - dies ist ganz abhängig vom Inhalt von p selbst. Das Urteilen als solches, welches durch den Urteilsstrich ausgedrückt wird, ist rein und leer. Liegt

[10] vgl. Thomasson, "Categories", §1.2.
[11] Kreis, *Negative Dialektik des Unendlichen: Kant, Hegel, Cantor*, S.177.
[12] Ebd., S.178.
[13] Ebd., S.179.
[14] Hegel, *Wissenschaft der Logik 1*.
[15] Maybee, "Hegel's Dialectics", §2.
[16] vgl. ebd., §2.
[17] Rödl, "Logic, Being and Nothing", S.106.

jedoch eine solche Konzeption des Urteils vor, so ist sie in der Tat in nichts unterschieden von der reinen Negation. In ihrer vollkommenen Abstraktion sind Behauptung und Verneinung ununterscheidbar. Anders ausgedrückt bezeichnet der Begriff „Sein" also genau so viel aus wie der Begriff „Nichts", nämlich „vollkommene Leerheit" (W V 83), weshalb „beim Sein ein Nichts an Bestimmtheit, ein Nullfall von Bestimmtheit, vorliegt, so daß sich die Identität mit Nichts (als Ununterschiedenheit beider), ergibt".[18] „Nichts an Bestimmtheit" bedeutet hier, dass beim Versuch, das Urteilen in seiner reinen Abstraktion zu denken, genau dasselbe gedacht wird wie in der reinen Negation. „Das Sein, das unbestimmte Unmittelbare, ist in der Tat *Nichts* und nicht mehr noch weniger als Nichts" (W V 83). Dies ist das dialektische Moment, der negativ-vernünftige Teil der logischen Reflexion: In seiner reinen Abstraktion gedacht, hebt sich der Begriff des Seins auf und schlägt in sein Gegenteil um.[19] „Wenn wir Sein ansetzen, dann realisieren wir nicht-diskursiv, daß damit ein Nichts an Bestimmtheit vorliegt, wenn wir Nichts ansetzen, dann realisieren wir, daß damit ein Bestehen, ein Positum, ein Sein vorliegt, woraus sich die Konvertibilität beider [...] ergibt".[20] Die spekulative oder auch positive Vernunft erkennt nun, dass es überhaupt schon eine Illusion war, die Begriffe Sein und Nichts getrennt zu denken. Für sich alleine genommen sind sie „Unwahrheiten" (W V 71) und nur in der konkreten Einheit des Begriffs *Werden* ergeben sie Sinn. Damit ist *Werden* der erste bestimmte Begriff und somit der eigentliche Anfang der „Logik".[21] „Die Proponierung des neuen Begriffs hängt offensichtlich daran, daß man das doppelte metatheoretische Realisieren, das Sich-verweisen-Lassen von Sein zu Nichts und von Nichts zu Sein [...] für thematisch relevant hält [...]".[22] Die Struktur des Werdens ist nun die Struktur der „ganz abstrakte[n] Vermittlung" (W V 124) und damit die Struktur des Urteils, welches nicht ganz formal vom Inhalt abstrahiert, sondern Bestimmtheit aufweist. Dieser dialektische Übergang aus den Begriffen *Sein* und *Nichts* zum ersten konkreten Begriff, dem *Werden* sollte nun aber nicht als „Urszene" des dialektischen Übergehens interpretiert werden. Viel eher scheint es so, „daß man aus der Analyse von Sein, Nichts und Werden im günstigen Fall eine sehr spezielle Ausprägung der positiven Dialektik gewinnen kann, nicht aber das Paradigma eines positiv dialektischen Übergehens".[23] Die Methode der Dialektik ist zuallererst die Dialektik der Kategorien selbst und daher „unvordenklich".[24]

3 Qualitative und quantitative Unendlichkeit

Die Dialektik der Kategorien wird sich an den beiden Begriffen *qualitative Unendlichkeit* und *quantitative Unendlichkeit* klarer zeigen. Diese Begriffe sind außerdem für das Verständnis der Hegel'schen Behandlung des Differentialkalküls von essentieller Bedeutung. Der Widerspruch im Begriff der qualitativen Unendlichkeit führt zur Kategorie der Quan-

[18] Hartmann und Müller, *Hegels Logik*, S.40.
[19] Maybee, "Hegel's Dialectics", §2.
[20] Hartmann und Müller, *Hegels Logik*, S.41.
[21] Rödl, "Logic, Being and Nothing", S.113.
[22] Hartmann und Müller, *Hegels Logik*, S.45.
[23] Kreis, *Negative Dialektik des Unendlichen: Kant, Hegel, Cantor*, S.193.
[24] Ebd., S.193.

tität, welche jedoch selbst kontradiktorische Eigenschaften aufweist und in gewissem Sinne eine Wiedervereinigung mit ihrer Vorgänger-Kategorie verlangt.

Der Begriff, von welchem die Überlegungen zur qualitativen Unendlichkeit ausgehen, ist das *Dasein* - ein qualitativ bestimmtes Etwas. Das Dasein ist das aufgehobene Werden und damit „die Einheit des Seins und des Nichts, in der die Unmittelbarkeit dieser Bestimmungen und damit in ihrer Beziehung ihr Widerspruch verschwunden ist, – eine Einheit, in der sie nur noch Momente sind" (W VIII 194)[25]. Damit unterliegt das Dasein aber auch dem Werden, dem Entstehen und Vergehen, und ist daher veränderlich.[26] Die Frage, die sich nun stellt, lautet, ob auch ein solches Etwas gedacht werden kann, welches Individualität aufweist, welches also im Strom des Entstehen und Vergehens doch gleich bleibt. Die Denkform, welcher ein solches Etwas entspräche, wäre das Atom bzw. das Individuum - das deutsche Wort, welches Hegel hierfür vorschlägt, lautet *Fürsichsein*. Dafür ist es nötig, sich ein Dasein, ein qualitativ bestimmtes Etwas, vorzustellen, welches eine „negative und zugleich unendliche Beziehung auf sich" (W VIII 204) aufweist. Weshalb ist für die Individuierung eines Etwas eine unendliche und negative Relation notwendig? Zunächst ist von vielen Instanzen eines Etwas auszugehen, welche ununterscheidbar sind - es besteht qualitative Identität von *Etwas* und *Anderem*.[27] Um nun ein Etwas als ein und dieselbe Sache zu identifizieren, ist sie von allen anderen zu unterscheiden. Dieses negative Verhältnis zu allen anderen kann jedoch auch als Verhältnis zum Negativ aller anderen gedeutet werden, also zu sich selbst.[28] Das negativ unendliche Verhältnis als Selbstverhältnis erklärt auch die reflexive Komponente im Terminus Für*sich*sein - ein vollständig individuiertes Etwas, ein *Selbst* ist entstanden. Hierdurch konstituiert sich eine Sache, welche eindeutig identifizierbar ist und damit numerische Identität aufweist, und das gerade dadurch, dass sie sich von allen anderen Sachen abgrenzt. „Eine vollständig bestimmte und dadurch (numerisch) identische Sache wird also auch als eine unendlich bestimmungsreiche Sache gedacht - als eine, wie Hegel sagt, qualitativ unendliche Sache oder, mit einem substantivierenden Ausdruck, *als qualitative Unendlichkeit*".[29] Die qualitative Unendlichkeit bzw. das Fürsichsein ist der Begriff des der Zahl nach Einen, oder „das Eins". Jedoch lässt sich aus dem Fürsichsein auch der Begriff der numerischen Vielheit ableiten, was den Widerspruch dieser Kategorie konstituiert. Wie argumentiert Hegel für solch eine Antinomie? Gerade weil die negative Beziehung einer individuierten Sache auf alle anderen Sachen eigentlich eine Selbstbeziehung ist, wird die Gesamtheit der Anderen dadurch wie ein Selbst behandelt. „Das Argument zeigt auf elegante Weise, daß dasjenige, was es *außerhalb* der ursprünglich betrachteten selbstbezüglichen Sache sonst noch gibt, *seinerseits* ein Selbst ist".[30] Diese Selbstbildung durch Setzen eines anderen Selbst nennt Hegel *Repulsion*: „Eins, das Bezogene enthält das Negative als Beziehung, hat dasselbe also *an* ihm selbst. Statt des Werdens ist also erstens die eigene immanente Beziehung des Eins vorhanden; und zweytens insofern sie negativ und das Eins seyen-

[25]Hegel, *Enzyklopädie der philosophischen Wissenschaften 1*.
[26]vgl. Hartmann und Müller, *Hegels Logik*, S.50.
[27]vgl. Kreis, *Negative Dialektik des Unendlichen: Kant, Hegel, Cantor*, S.233.
[28]vgl. ebd., S.234.
[29]Ebd., S.235f.
[30]Ebd., S.242.

des zugleich ist, so stößt das Eins sich selbst *von sich* ab. Die negative Beziehung des Eins auf sich ist *Repulsion*. Diese Repulsion, so als das Setzen der *vielen Eins* aber durch Eins selbst ist das eigne Außersichkommen des Eins, aber zu solchen außer ihm, die selbst nur Eins sind" (W V 187). Damit ergibt sich aber ein Widerspruch: Das Fürsichsein, das numerisch Identische, setzt weitere Einheiten nach seinem Ebenbild - ist also zugleich Eines und Vieles. Um solche widersprüchlichen Ergebnisse einer begrifflichen Analyse zu unterbinden, kann nun versucht werden, das Fürsichsein durch den Begriff der „äußerlichen Repulsion" (W V 187) umzudefinieren: Wird das Fürsichsein von vorneherein als nicht-unendliche Einteilung eines Ganzen in Einheiten gedacht, scheint das Problem zunächst gelöst. Doch da zwischen den einzelnen Einheiten keine qualitative Differenz besteht, ist eine solche Einteilung den gedachten Atomen ganz und gar äußerlich. Ist das Prinzip der Individuierung jedoch eine „äußerliche Grenze" (W V 188), ist ein variables Setzen dieser Grenze innerhalb der Atome, eine beliebig feinkörnige Einteilung also des Ganzen, denkbar. „Qualitativ indifferente Einteilung ist unendliche Einteilbarkeit".[31] Im Gegensatz zur Repulsion, dem gedanklichen Setzen der Eins außerhalb des Fürsichseins, liegt hier ein Setzen der Eins innerhalb seines vor: „Diß sich in-Ein-Eines-setzen der vielen Eins ist die Attraction" (W V 192). Repulsion und Attraktion als endliche und unendliche Einteilbarkeit des Ganzen bilden also die widersprüchlichen Denkbewegungen innerhalb der Kategorie des Fürsichseins.

Aufgelöst wird dieser Widerspruch durch die Kategorie der Quantität. Durch Analyse der Begriffe Attraktion und Repulsion zeigt sich nämlich, dass beide „Teile einer einzigen begrifflichen Sphäre"[32] sind. „Jedes [ist] vermittelst der *anderen* als *anderen*" (W V 195). Mit der Kategorie der Quantität wird nun eine Struktur gedacht, welche beide Begriffe vereint, in dem Sinne, dass sie in einer Hinsicht kontinuierlich ist, in anderer Hinsicht diskret. Diskretheit und Kontinuität sind hierbei die Nachfolgebegriffe von Repulsion und Attraktion. „Quantity does not follow arbitrarily from quality; it is the result of the self-superceding of the qualitative sphere. The very logic of a thought about quality leads it to go beyond itself into a thought about quantity".[33] Fürsichsein weist bei näherer Untersuchung also widersprüchliche Eigenschaften auf, welche erst durch den Begriff der Quantität aufgehoben werden. Doch auch in dieser Kategorie kommt es zu Widersprüchen, wobei Hegel insbesondere die Begriffe *Zahl*, *intensive Größe* und *unendlicher quantitativer Progress* diskutiert. Da die Grundstruktur sich stark ähnelt,[34] soll hier in erster Linie der letzte dieser drei Begriffe untersucht werden.

Unter dem diskreten Aspekt der Quantität wäre eine Zahl, beispielsweise die 1, bestimmt und abgegrenzt zu anderen Zahlen - der Übergang zur Zahl 2 wäre also der Übergang zu einer anderen Sache. Unter dem kontinuierlichen Aspekt ist dieser Wechsel natürlich ein Übergang innerhalb derselben Struktur. Das Quantum hat also die eigentümliche Charakteristik, einerseits nur dadurch als es selbst bestimmt zu sein, eine Grenze zu haben - die 2 ist *nicht* die 3 - und gleichzeitig dadurch, diese Grenze zu übertreten

[31] Kreis, *Negative Dialektik des Unendlichen: Kant, Hegel, Cantor*, S.245.
[32] Ebd., S.252.
[33] Lacroix, "The mathematical infinite in Hegel", S.304.
[34] Kreis, *Negative Dialektik des Unendlichen: Kant, Hegel, Cantor*, S.290.

- die 2 ist nur die 2, weil *nach* ihr die 3 kommt. „Aber weil diß zum Disseits gewordene wieder ein Quantum ist, ist nur wieder eine neue Grenze gesetzt worden; diese, als Quantum, ist auch wieder von sich selbst geflohen, ist als solches über sich hinaus, und hat sich in sein Nichtseyn, in sein Jenseits von sich selbst repellirt, das ebenso perennirend zum Quantum wird, als dieses sich von sich selbst zum Jenseits abstößt" (W V 263). Den Widerspruch des Quantums könnte man also auch so ausdrücken: Jede Zahl ist endlich, aber gleichzeitig gibt es unendlich viele davon. „This expresses the inherent contradiction of the quantum without being able to surmount it; instead of articulating the two constituent moments of the quantum, its representation in itself and its determination by an other, the representation makes them alternate indefinitely [...] Truly quantitative infinity occurs once thinking effectively articulates the two aspects that the understanding separates".[35] Der Widerspruch kann also aufgelöst werden, wenn das vernünftige Denken die beiden Aspekte im Begriff des Quantums klar artikuliert: „Nehmen wir ihn zunächst in seinen abstracten Bestimmungen wie sie vorliegen, *so ist in ihm das Aufheben des Quantums, aber eben so sehr seines Jenseits, also die Negation des Quantums sowohl, als die Negation dieser Negation vorhanden.* Seine Wahrheit ist ihre Einheit, worin sie, aber als Momente, sind. – Sie ist die Auflösung des Widerspruchs, dessen Ausdruck er ist, und ihr nächster Sinn somit die *Wiederherstellung des Begriffs der Größe*, daß sie gleichgültige oder äußerliche Grenze ist" (W V 277.) Der höhere Begriff der Größe soll also ein Begriff der äußerlichen Grenze selbst sein. „In other words, the process by which it [the determined quantum] goes beyond itself is at once what constitutes its internal determination, which is to say, that which qualifies it".[36] Eine Möglichkeit, sich die Äußerlichkeit des Quantums als distinkte Qualität verständlich zu machen läge, wie Kreis vorschlägt, in der Konzeption des *Gesetzes*: So können die natürlichen Zahlen beispielsweise durch ein Gesetz zur Reihenbildung $a_{n+1} = a_n + 1$ gefasst werden. Dieses Gesetz wäre die äußere Grenze des Zahlen-Begriffs und würde dennoch die Ableitung unendlich vieler natürlicher Zahlen erlauben.[37] Dies ist allerdings ein eigener Vorschlag von Kreis, welcher bei Hegel nicht auftaucht. Für letzteren ist der Begriff des qualitativen Quantums zunächst der Begriff des quantitativen Verhältnisses und dann schließlich der Begriff des Maßes. Auf Letzteres soll hier nicht weiter eingegangen werden, Ersteres - der Begriff des quantitativen Verhältnisses - spielt hingegen eine sehr zentrale Rolle in Hegels Interpretation des Differenzialkalküls. Doch was ist darunter zu verstehen und weshalb löst den Widerspruch der quantitativen Unendlichkeit gerade der Verhältnis-Begriff? Hegel betrachtet hier drei Varianten: Das *direkte*, das *umgekehrte* und das *Potenzverhältnis*.[38] Ein direktes Verhältnis zwischen zwei Veränderlichen x und y liegt vor, wenn gilt:

$$\frac{x}{y} = c$$

[35] Lacroix, "The mathematical infinite in Hegel", S.305.
[36] Ebd., S.306.
[37] vgl. Kreis, *Negative Dialektik des Unendlichen: Kant, Hegel, Cantor*, S.298.
[38] vgl. Wolff, "Hegel und Cauchy", S.243ff.

Das Verhältnis ist umgekehrt, wenn

$$\frac{x}{c} = \frac{1}{y}$$

Ein Potenzverhältnis besteht zwischen x und y, wenn

$$\frac{x}{y} = x \text{ also } x = y^2$$

Das direkte Verhältnis schafft eine Verhältnisbestimmung zweier Größen, antwortet also auf das Wie ihres Verhältnisses. Gleichzeitig abstrahiert diese Bestimmung bereits von den konkreten Werten der Quanta, die in diesem Verhältnis stehen: Das Verhältnis $\frac{2}{7}$ kann auch durch $\frac{4}{14}$ oder $\frac{6}{21}$, also durch unendlich viele Quanta, ausgedrückt werden. Allerdings kann für den Bruch $\frac{2}{7}$ auch eine Anzahl c als Ergebnis der Frage, wie häufig die 7 in der 2 enthalten ist, angegeben werden - damit kann das direkte Verhältnis durch ein konkretes Quantum ausgedrückt werden und erfüllt die qualitative Intention der Verhältnisbestimmung nur mangelhaft (W V 374-376).

Das indirekte Verhältnis wird dem Begriff des qualitativen Quantums schon eher gerecht. Auch hier wird das Verhältnis von x und y durch ein festes Quantum c ausgedrückt, allerdings ist es keine Anzahl mehr, die sagt, wie häufig y in x enthalten ist, sondern eine abstraktere Grenze.

Den Zielpunkt der begrifflichen Entwicklung stellt das Potenzverhältnis dar. Auf die Frage, wie sich x und y hier zueinander verhalten, lässt sich keine feste Größe angeben. Ihr Verhältnis ist also nicht von außen determiniert, sondern allein durch y selbst. Damit aber ist ein Selbstverhältnis entstanden, also eine Instanz des Fürsichseins und eine genuin qualitative Relation. Das Quantum „ist zu seinem Anderen, der Qualität, geworden, insofern jene Äußerlichkeit nun als vermittelt durch es selbst, so als ein Moment gesetzt ist, daß es eben *in ihr sich auf sich selbst bezieht*, Sein als Qualität ist" (W V 383). Das Quantum als Zahl hat für Hegel stets die beiden Begriffsmomente, aus einer Einheit und einer Anzahl zusammengesetzt zu sein. Die 5 beispielsweise lässt sich nur so bilden, dass zunächst die 1 als Einheit gesetzt wird und dann die 5 als Anzahl dieser Einheit bestimmt wird. Genauso kann aber die 5 wiederum die Einheit in einer Multiplikation sein, von welcher eine gewisse Anzahl, beispielsweise $2 \cdot 5$, konstruiert wird. Im Potenzverhältnis jedoch, beispielsweise $5 \cdot 5$, sind Einheit und Anzahl identisch. Damit ist das Über-Sich-Hinausgehen des Quantums als Anzahl zur Einheit geworden: „Dies ist der Fall im Potenzenverhältnisse, wo die Einheit, welche Anzahl an ihr selbst ist, zugleich die Anzahl gegen sich als Einheit ist. Das Anderssein, die Anzahl der Einheiten, ist die *Einheit* selbst" (W V 382).

Das Potenzverhältnis löst also den Widerspruch in der quantitativen Struktur, dass endliche Größen stets zu anderen endlichen Größen führen. Es enthält „damit das Moment der Unendlichkeit, des Fürsichseins, d.i. des Bestimmtseins durch sich selbst" (W V 324). Das ist auch der Grund, weshalb dem Potenzverhältnis in Hegels Behandlung der Differentialrechnung eine so bedeutende Stellung zukommt, wie im folgenden Abschnitt erläutert wird.

4 Die Hegel'sche Behandlung des Differentialkalküls

Umfasste der Exkurs zum Differentialkalkül in der ersten Auflage der Logik von 1812 noch lediglich eine Anmerkung, so schwoll er in der zweiten Auflage auf drei Anmerkungen und über hundert Seiten an. Dies spiegelt das stetige Interesse wider, welches Hegel der Analysis entgegenbrachte und möglicherweise auch seine Einschätzung, die umfangreiche, in den dazwischenliegenden zwanzig Jahren veröffentlichte Literatur habe die Probleme rund um das Differentialkalkül nicht auflösen können. Aus heutiger Perspektive mag dies verwundern, denn in diesen Zeitraum fällt die Publikation zweier bahnbrechender Werke des französischen Mathematikers Augustin-Louis Cauchy: Die *Cours d'analyse* von 1921 und das *Résumée des lecons sur le calcul infinitésimal* von 1923. Diese beiden Lehrbücher läuteten die erste Reform der Analysis im 19. Jahrhundert ein, in Form der „Cauchy'sche Revolution der Strenge":[39] Die vor Cauchy meist in einem eher intuitiven Verständnis gebrauchten, fundamentalen Begriffe der Analysis wie *Stetigkeit* und *Grenzwert* wurden in diesen Werken das erste Mal in exakte Definitionen überführt. Dies veränderte die Art und Weise der damaligen Zeit, Mathematik zu betreiben, fundamental.[40] Eine Streitfrage in der Rezeption der Anmerkungen Hegels zum Differentialkalkül ist, inwieweit dieser in der zweiten Auflage der Logik auf die Arbeiten Cauchys Bezug nimmt. Obgleich der Name Cauchy an keiner Stelle direkt auftaucht, sieht Michael Wolff in seiner Untersuchung „Hegel und Cauchy"[41] dennoch eine indirekte Auseinandersetzung mit Cauchys Grenzwert-Begriff im Gange. Auch der französische Philosoph Alain Lacroix sieht die zweite Anmerkung als direkt an Cauchy gerichtet.[42] Wird diese Verbindung von manchen Autoren als „erhellend"[43] bezeichnet, lesen andere in den von Wolff herangezogenen Textstellen eher Anspielungen auf Sylvestre Lacroix als auf Cauchy.[44]

Die erste Anmerkung trägt den Titel „Die Begriffsbestimmtheit des mathematischen Unendlichen" und wird von Hegel mit der Feststellung eröffnet, eben dieses Unendliche habe den Körper der Mathematik erheblich erweitert, womit bereits auf das Differentialkalkül angespielt wird. Jedoch erscheint Hegel das mathematische Unendliche „dadurch merkwürdig, daß es dieser Wissenschaft noch nicht gelungen ist, sich über den Gebrauch desselben durch den Begriff (Begriff im eigentlichen Sinne genommen) zu rechtfertigen" (W V 279). Diese Einschätzung mag zunächst verwundern, da fraglich ist, inwieweit die Mathematik überhaupt mit Begriffen arbeitet - doch auch Hegel selbst sagt von ihr: „Denn sie ist nicht eine Wissenschaft, die es mit den Begriffen ihrer Gegenstände zu tun [...] hätte" (W V 280f.). Offenbar besteht beim Rechnen mit dem Unendlichen jedoch eine Ausnahme. Hier kann die Mathematik den Begriff nicht umgehen, da ein grundsätzlicher Widerspruch besteht: „Denn die Rechnung des Unendlichen erlaubt und erfordert Verfahrensweisen, welche die Mathematik sonst bei Operationen mit endlichen Größen durchaus verwerfen muss" (W V 281). Doch worin besteht diese widersprüchliche Ver-

[39] Lakatos, "Unendlicher Regreß und Grundlagen der Mathematik", S.10.
[40] vgl. ebd., S.10.
[41] Wolff, "Hegel und Cauchy".
[42] Lacroix, "The mathematical infinite in Hegel", S.298.
[43] Kreis, *Negative Dialektik des Unendlichen: Kant, Hegel, Cantor*, S.306.
[44] Boehme, "Analysis bei Hegel", S.177.

fahrensweise? Hegel meint hier die infinitesimalen Inkremete des Differentialkalküls: Angenommen es sei eine Funktionsgleichung gegeben, beispielsweise die folgende:

$$y = x^2$$

Nun besteht eine Grundmethode der Analysis darin, das Verhältnis $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ infinitesimaler Inkremente $\mathrm{d}x$ und $\mathrm{d}y$ zu bestimmen. Für $y = x^2$ ergibt sich das folgende Verhältnis:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{(x + dx)^2 - x^2}{\mathrm{d}x} = 2x + \mathrm{d}x$$

Das gewünschte Differentialverhältnis entspricht nun dem ersten Term $2x$, wohingegen der zweite Term $\mathrm{d}x$ als unendlich klein angenommen wird. Dies ist nun aber genau der Grundwiderspruch, in welchen sich die Analysis Hegel zufolge verheddert, „indem sie endliche Größen um eine unendlich kleine Größe das eine Mal vermehrt, diese in der ferneren Operation zum Teil beibehält, aber einen Teil derselben auch vernachlässigt" (W V 281). Denn während $\mathrm{d}x$ auf der rechten Seite der Gleichung weggelassen, also gleich Null gesetzt wird, darf dies auf der linken Seite natürlich nicht geschehen, da sonst ein verbotener Term $\frac{0}{0}$ entstünde.

Gegenüber der Differentialrechnung wurde im 18. Jahrhundert und zu Beginn des 19. Jahrhunderts erhebliche Kritik angebracht und dies nicht nur durch Hegel. Seit den Anfängen der modernen analytischen Geometrie bei Fermat und Descartes und ihrer Beschäftigung mit den Kegelschnitten des Apollonius[45] und anderer antiker Geometrie war die Frage nach den Infinitesimalen heiß diskutiert. Eine einflussreiche Interpretation lieferte Newton mit seinem Begriff der *Fluxionen*, welche auch Hegel aufgreift und welche die Infinitesimale als *verschwindende Größen* auffasst. Für einen solchen Begriff von Größen, die keine wirklichen Größen mehr sind, wurde Newton scharf kritisiert. Der prominenteste Kritiker war Bischof Berkeley, welcher sich in seinem berühmten Phamphlet „Der Analyst" fragt, ob es zwischen einer Mathematik, die mit solchen „Geistern verschwundener Größen" rechnet und dem Glauben noch irgendeinen Unterschied gibt.[46] Die verbreitete Skepsis gegenüber dem Infinitesimal-Begriff zu Hegels Zeit zeigt sich beispielhaft auch in einer Preisfrage der Berliner Akademie der Wissenschaft von 1784, ob der Begriff des Unendlichen für die Analysis nicht überflüssig sei. Hegel kommentiert dies in seinen Jenaer Systementwürfen von 1804/05 folgendermaßen: „Das Unendlichkleine soll nicht nichts sein und doch keine Größe mehr haben. Nach hundert Jahren des Gebrauchs dieses Begriffes ist es zu einer Preisaufgabe gemacht worden, ob er wirklich einen Sinn habe, und man sieht, dass die Beantwortungen über ihn nicht im klaren gewesen sind" (GW VII 18).[47] Der damalige Direktor der Berliner Akademie und Initiatior der Preisaufgabe war niemand anderes als Joseph-Louis Lagrange, welcher in seinem eigenen Forschungsprogramm ebenfalls eine vollständige Algebraisierung der Analysis anstrebte, um diese vom Infinitesimalbegriff zu reinigen.[48] Hierfür rückte er die Potenzreihe in

[45] vgl. Sonar, *3000 Jahre Analysis: Geschichte-Kulturen-Menschen*, S.252.
[46] Wikisource, *The Analyst: a Discourse addressed to an Infidel Mathematician — Wikisource,* §59.
[47] Hegel, *Jenaer Systementwürfe II: Logik, Metaphysik, Naturphilosophie*.
[48] vgl. Wolff, "Hegel und Cauchy", S.198.

den Mittelpunkt der Differentiationsrechnung, ein Kniff, welcher bei Hegel großen Anklang fand und auf den später noch zurückzukommen sein wird. Lagranges Programm, eine Analysis ohne Infinitesimalbegriff zu begründen, scheiterte jedoch,[49] sodass zu Hegels Zeit wieder verstärkt diskutiert wurde, inwieweit die Widersprüche möglicherweise durch das Konzept eines Grenzwertes aufgelöst werden könnten. Auf diese Diskussion, ob $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p$ einen festen Wert annehmen könnte, während $\mathrm{d}x$ und $\mathrm{d}y$ gegen 0 strebten, geht Hegel ein, wenn er schreibt: „Den Vorteil, die Inkonsequenz, die hierin liegt, abzulehnen, soll nun die Vorstellung der *Grenze* gewähren; p soll zugleich nicht das wirkliche Verhältnis, das $= \frac{0}{0}$ wäre, sondern nur der bestimmte Wert sein, dem sich das Verhältnis *unendlich*, d.i. so *nähern* könne, daß der *Unterschied kleiner als jeder gegebene* werden könne" (W V 314). In eben dieser und darauffolgenden Passagen liest Michael Wolff eine Bezugnahme auf Cauchy, welcher in seinem *Résumée* das Verhältnis $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ als Grenzverhältnis charakterisiert. Dieser Gedanke geht ursprünglich auf Newton zurück, mit dem sich Hegel noch intensiver beschäftigen wird, und wurde von d'Alembert weiter formalisiert.[50] Cauchy abstrahiert den limes-Begriff in seinem rigorosen Werk noch stärker, welches - für ein mathematisches Lehrbuch der damaligen Zeit ungewöhnlich - vollkommen auf geometrische Abbildungen verzichtet. Ob Hegel nun in seiner Kritik speziell auf Cauchy oder aber auf auf andere Forscher, welche zu „The origins of Cauchy's rigorous calculus"[51] gezählt werden können, Bezug nimmt, sei dahingestellt. Die Art der Kritik zeigt in jedem Fall Hegels eigene, ganz spezielle Interpretation des Differentialkalküls: „Die *Grenze* hat hiermit hier nicht den Sinn des Verhältnisses; sie gilt nur als der letzte Wert, dem sich eine andere Größe von gleicher Art beständig so nähere, daß sie von ihm, sowenig als man will, unterschieden sein könne und daß das letzte *Verhältnis* ein Verhältnis der *Gleichheit* sei. So ist die unendliche Differenz das Schweben eines Unterschieds eines Quantums von einem Quantum, und die qualitative Natur, nach welcher $\mathrm{d}x$ wesentlich nicht eine Verhältnisbestimmung gegen x sondern gegen ist, tritt in der Vorstellung zurück" (W V 317). Denn Hegel sieht im Verhältnis das eigentliche Kernstück des Diffferentialkalküls. Das Inkrement $\mathrm{d}x$ ist eben kein Quantum wie die Variable x, sondern „hat nur Bedeutung in Beziehung auf ein im *Verhältnis* mit ihm Stehendes" (W V 285). Das bedeutet aber auch, dass $\mathrm{d}x$ außerhalb von $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ nicht betrachtet werden kann, was in einem Grenzwertprozess, in dem $\mathrm{d}x$ sich 0 annähert, eben gerade der Fall ist. Darüberhinaus gibt Hegel aber auch eine grundsätzliche Kritik an der Vorstellung der unendlichen Annäherung: „Daß aber ein quantitativer Unterschied, der die Bestimmung hat, kleiner als jeder gegebene sein zu *können* nicht nur, sondern *sein zu sollen*, kein quantitativer Unterschied mehr ist, dies ist für sich klar, so evident, als irgend etwas in der Mathematik evident sein kann; damit aber ist über $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{0}{0}$ nicht hinausgekommen worden" (W V 314). Bereits im Kapitel zum quantitativ unendlichen Progress argumentierte Hegel gegen die Vorstellung, ein qualitatives Größenverhältnis könne rein quantitativ als Reihe dargestellt werden. Wenn aber $\mathrm{d}x$ und $\mathrm{d}y$ in diesem Sinne keine Quanta mehr sind - was sind sie dann?

Eine Konzeption, welche das Differentialverhältnis als qualitatives Verhältnis wesent-

[49] vgl. Wolff, "Hegel und Cauchy", S.231.
[50] vgl. ebd., S.208.
[51] Grabiner, *The origins of Cauchy's rigorous calculus*.

lich besser fasst als alle anderen, ist in Hegels Augen diejenige von Newton. Dieser hatte in seiner *Principia Mathematica* (1686) vom Differentialverhältnis geschrieben, man dürfe „unter dem letzten Verhältnis (ultimam rationem) dahinschwindender Größen nicht das Verhältnis der Größen verstehen, bevor sie dahinschwinden, auch nicht das danach, sondern das, mit welchem sie dahinschwinden (quaecum evanescunt)".[52] Dazu sagt Hegel: „Der Gedanke kann nicht richtiger bestimmt werden, als *Newton* ihn gegeben hat" (W V 298). Es gibt jedoch bei diesen beiden Denkern einen gewaltigen Unterschied zwischen den Konzeptionen von Quanta im Allgemeinen: Newton hat einen Begriff von Variablen, deren momentane Veränderung er Inkremente nennt und welche „werdende Prinzipien oder Anfänge jeder endlicher Größe"[53] sind. Für ihn existieren also wohldefinierte Infinitesimale durchaus, ohne sie gäbe es nicht einmal normale Zahlen. Das sieht für Hegel anders aus, welcher dementsprechend von Newtons Konzeption sagt, dass in ihr der „wahrhafte Begriff des Unendlichen liegt, daß er aber nicht in seiner Bestimmtheit herausgehoben und gefaßt worden ist" (W V 304). Hegel will also weiter abstrahieren und den Begriff einer Größenbestimmung rein als Moment eines Verhältnisses bilden.[54] Dieser Begriff des qualitativen Verhältnisses würde dann auch dem wahren limes-Begriff der Analysis entsprechen, der bis dahin unklar geblieben ist.[55] Wenn $\mathrm{d}x$ und $\mathrm{d}y$ jedoch nur noch Momente eines qualitativen Verhältnisses sind, stellt sich die Frage, was denn eigentlich durch dieses Verhältnis bestimmt wird. Hierfür ist es notwendig, auf die zentrale Rolle einzugehen, welche Hegel dem Potenzverhältnis in der ganzen Sache einräumt: „Die ausdrückliche qualitative Größenbestimmtheit bezieht sich somit, wie gleichfalls schon erinnert, wesentlich auf Potenzenbestimmungen, und da die Differentialrechnung das Spezifische hat, mit qualitativen Größenformen zu operieren, so muß ihr eigentümlicher mathematischer Gegenstand die Behandlung von Potenzenformen sein, und die sämtlichen Aufgaben und deren Auflösungen, zu deren Behuf die Differentialrechnung gebraucht wird, zeigen es, daß das Interesse allein in der Behandlung von Potenzenbestimmungen als solchen liegt" (W V 324f.). Diese Einschätzung, welche Hegel im übrigen mit Schelling teilt,[56] geht unter anderem auf die Lagrange-Rezeption der beiden zurück. Lagrange hatte, wie bereits erwähnt, eine Algebraisierung der Analysis ohne Infinitesimalbegriff angestrebt. Hierfür definierte er die Ableitung einer Funktion als erstes Glied ihrer Potenzreihe.[57] Um für eine Funktion $f(x)$ an der Stelle x_0 die Potenzreihe aufzustellen, wird die Variable x durch $x_0 + i$ ersetzt, also eine von i abhängige Funktion definiert, weshalb man auch davon spricht, $f(x)$ an der Stelle x_0 nach i zu entwickeln.

$$f(x_0 + i) = f(x_0) + pi + qi^2 + ri^3 + \dots$$

Die Ableitung der Funktion $f(x)$ an der Stelle x_0 wird von Lagrange nun als erster Koeffizient von i in der Potenzreihenentwicklung, also als das p in obiger Gleichung, definiert.

[52]Newton, *Die mathematischen Prinzipien der Physik*, S.58.
[53]Ebd., S.256.
[54]vgl. Boehme, "Analysis bei Hegel", S.169.
[55]vgl. Wolff, "Hegel und Cauchy", S.242.
[56]vgl. Nolasco, "Hegel's Critique of the Infinitesimal Calculus and Analytical Practice", S.439.
[57]vgl. Fraser, "Joseph Louis Lagrange, Théorie des fonctions analytiques, (1797)", S.261.

Um nun zu zeigen, dass p tatsächlich dem Differentialverhältnis $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ entspricht, machte er von einer grundlegenden Eigenschaft der Potenzreihen Gebrauch, nämlich dass „man in der Reihe $f(x_0+i) = f(x_0)+pi+qi^2+ri^3+\ldots$, die auf der Entwicklung von $f(x_0+i)$ beruht, h immer so klein annehmen kann, dass ein beliebiges Glied der Reihe größer ist, als die Summe aller folgenden".[58] Dies nannte Lagrange den Fundamentalsatz seiner Analysis. Gerade in Hegels Kritik an diesem letzteren Punkt wird jedoch deutlich, worin sich seine Interpretation der Potenzreihen grundsätzlich von der Üblichen unterscheidet: „Es wird auch in dieser Methode von den Kategorien vom *Zuwachs* und von der *Differenz* der Funktion angefangen, deren veränderliche Größe den *Zuwachs* erhalte, womit die lästige Reihe hereinkommt, von der ursprünglichen Funktion" (W V 311f.) In seiner Fokussierung auf den Zuwachs und die Differenz als quantitativen Größen übersieht Lagrange also den wesentlich qualitativen Charakter der Potenzreihe: „[...] es muß ohnehin von der Reihe und von der Bestimmung der Koeffizienten nach der Stelle, die sie in der Reihe haben, abstrahiert werden; das Verhältnis zwischen allen ist dasselbe" (W V 332f.). Der eigentliche Grund, weshalb das Restglied einer Reihe weggelassen werden kann liegt nicht in seiner relativen Kleinheit, sondern im Verhältnis zwischen der ursprünglichen Funktion und ihrer Ableitung. Denn wie Lagrange gezeigt hatte, kann der erste Koeffizient wiederum in eine Potenzreihe entwickelt werden, deren erster Koeffizient dann mit dem zweiten Koeffizienten der ursprünglichen Potenzreihe identisch ist, womit gezeigt wird, dass eben dieser zweite Koeffizient die zweite Ableitung der Ausgangsfunktion ist.[59] Das Wesentliche ist hierbei jedoch das Verhältnis einer Ausgangsfunktion zu ihrer Ableitung, welches in den Gliedern der Potenzreihe nur wiederholt wird, wobei das qualitative Moment bereits im ersten Glied vollständig bestimmt ist.[60] Dieses qualitative Verhältnis auszudrücken, ist also das eigentliche Ziel der Differentialrechnung. Mit dieser Interpretation der Potenzreihe ist es nun möglich, Hegels Verständnis des Differentialkalküls deutlich zu machen. Weil es um qualitative Verhältnisse geht, ist die Überführung einer Funktion in ihre Ableitung keine gewöhnliche quantitative Operation wie beispielsweise die Addition mehr, sondern ein mathematischer Prozess ganz neuer Art: „Der Übergang von der Funktion der veränderlichen Größe in ihr Differential ist aber anzusehen, daß er von ganz anderer Natur ist, nämlich, wie erörtert worden, daß er als Zurückführung der endlichen Funktion auf das qualitative Verhältnis ihrer Quantitätsbestimmungen zu betrachten ist" (W V 303). Die oben gestellte Frage, was das Verhältnis $p = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ denn nun eigentlich ausdrückt, wenn $\mathrm{d}x$ und $\mathrm{d}y$ keine Quanta mehr sind, kann also folgendermaßen beantwortet werden: „p ist die Grenze des Verhältnisses von x und y in dem Sinne, dass es die qualitative (nicht quantitative) Bestimmtheit des ursprünglichen Potenzverhältnisses zwischen x und y ausdrückt".[61] Hegels Interpretation des Differentialkalküls als qualiative Bestimmtheit eines Potenzverhältnisses wirft natürlich die Frage auf, was denn mit den ganzen restlichen Funktionen, wie beispielsweise dem Logarithmus, anzufangen ist. Hegel scheint auf dieses Bedenken einzugehen, wenn er schreibt: „[...] die Behandlung

[58]vgl. Lagrange, *Oeuvres de Lagrange: 3*, S.28.
[59]vgl. Fraser, "Joseph Louis Lagrange, Théorie des fonctions analytiques, (1797)", S.263.
[60]vgl. Yeomans und Kaufmann, "Hegel on Calculus", S.380.
[61]Wolff, "Hegel und Cauchy", S.252.

der Exponentialgrößen und Logarithmen, Reihen, die Gleichungen höherer Ordnungen haben ihr Interesse und ihre Bemühung allein mit Verhältnissen, die auf Potenzen beruhen" (W V 325). Offenbar fasst Hegel die übrigen analytischen Funktionen bloß als ein „Mittel zur Durchführung elementarer Operationen an Potenzfunktionen"[62] auf - so wie sich der Logarithmus $\ln(x)$ beispielsweise ergibt, wenn nach einer Stammfunktion für x^{-1} gesucht wird. Der Autor von „Hegel und Cauchy", Michael Wolff, schreibt darüber hinaus, dass Hegels Fokussierung auf Potenzfunktionen nur im Kontext seiner generellen Formalismuskritik an der Mathematik verstanden werden kann.[63] Offenbar sieht Hegel nur in Potenzverhältnissen im strengen Sinne Funktionen - was nicht bedeutet, dass andere, „nicht-hegelianische Funktionen" formaliter nicht ebenso ableitbar wären, nur wird dort der Sache nach eben kein qualitatives Verhältnis herausgehoben.

5 Die Rolle der Hegel'schen Behandlung des Differentialkalküls für die Entwicklung der Kategorien

Die Anmerkungen zum Differentialkalkül kreisen, wie gezeigt wurde, stets um den Begriff des qualitativen Verhältnisses. Offensichtlich traut Hegel der Mathematik nicht zu, den kategorialen Übergang, welcher sich hier vollzieht, mit ihren formalen Mitteln nachvollziehen zu können. Aus heutiger Perspektive ist es nicht möglich, diese Einschätzung Hegels kritisch zu beleuchten, ohne auf die enorme Erweiterung der Mathematik durch Cantor zu rekurrieren, was an dieser Stelle jedoch zu weit führt. Guido Kreis geht in seinem Buch „Negative Dialektik des Unendlichen"[64] sogar so weit, das gesamte Gebäude der „positiven Dialektik" Hegels mit Cantor zu Fall zu bringen. Falls jedoch davon ausgegangen wird, dass das dieses Gebäude noch sicher steht - welche Rolle spielen in demselbigen die Anmerkungen zum Differentialkalkül für die Entwicklung der Kategorien? Eingangs wurde diese Frage insbesondere so formuliert, ob Hegel hier eine originär mathematische Erkenntnis präsentiert oder ob die Entwicklung der Kategorien umgekehrt durch das Differentialkalkül verständlicher gemacht werden soll. Diese Zweiteilung lässt sich so sicher nicht mehr aufrecht erhalten, vielmehr ist beides der Fall: Zum einen argumentiert Hegel explizit mathematisch und insbesondere seine Betrachtungen zur Potenzentwicklung können sogar als eigenes mathematische Argument interpretiert werden, weshalb Funktionen überhaupt als Potenzreihen dargestellt werden können.[65] Auf der anderen Seite machen die Anmerkungen den Übergang von der Kategorie der Quantität zur Kategorie des qualitativen Quantums deutlich. Dieser Übergang ist insbesondere von den Wiedersprüchen getrieben, die sich in den quantitativen Strukturen ergeben. Insofern kann der Diskurs zum Differentialkalkül auch als umfassende Darstellung der erfolglosen Versuche des verständigen Denkens gelesen werden, diese Widersprüche aufzulösen. Am deutlichsten wird das in Hegels Diskussion von Newtons ultimam ratio und der Kritik an diesem Konzept durch d'Alembert und andere: „Wenn die Mathematik des Unendlichen

[62] Wolff, "Hegel und Cauchy", S.232.
[63] vgl. ebd., S.257.
[64] Kreis, *Negative Dialektik des Unendlichen: Kant, Hegel, Cantor*.
[65] vgl. Wolff, "Hegel und Cauchy", S.217.

daran festhielt, daß jene Quantitätsbestimmungen verschwindende Größen, d.h. solche [seien], die nicht mehr irgendein Quantum, aber auch nicht nichts, sondern noch eine *Bestimmtheit gegen Anderes* sind, so schien nichts klarer, als daß es keinen solchen *Mittelzustand*, wie man es nannte, zwischen Sein und Nichts gebe" (W V 296f.). Bereits in einer Anmerkung zum Begriff des Werdens geht Hegel auf diese Kritik ein: „Dagegen ist aber gezeigt worden, daß Sein und Nichts in der Tat dasselbe sind oder, um in jener Sprache zu sprechen, daß es gar nichts *gibt*, das nicht ein *Mittelzustand zwischen Sein und Nichts ist*. Die Mathematik hat ihre glänzendsten Erfolge der Annahme jener Bestimmung, welcher der Verstand widerspricht, zu danken" (W V 111). Der Begriff des Werdens ist, wie dargelegt wurde, der eigentliche Anfang der „Wissenschaft der Logik". Es verwundert daher nicht, dass dieser fundamentale Begriff, der unser Denken und die Wirklichkeit selbst strukturiert, in der Mathematik eine wichtige Rolle spielt. Die Anmerkungen zum Differentialkalkül können auch so gelesen werden: Hegel zeigt hier auf, an welchen Stellen dieser Begriff, vom formalen Denken unbemerkt, unter der Oberfläche wirkt und das begriffliche Feld der Mathematik erweitert. Diese Disziplin wurde in den vergangenen zweihundert Jahren in ihrem Umfang noch einmal erheblich vergrößert. Insbesondere wurde die Differentialrechnung zur Differentialgeometrie verallgemeinert, um beispielsweise auch auf Mannigfaltigkeiten wie der Raumzeit der Allgemeinen Relativitätstheorie Ableitungen bilden zu können. Eine sehr lohnende, weiterführende Forschungsfrage wäre daher, ob die Differentialgeometrie den Begriff des Werdens besser fassen kann oder ob weitere Widersprüche aufgetaucht sind - welche möglicherweise durch die Dialektik Hegels aufgelöst werden können.

Literatur

Ackrill, J. L. *Aristotle: Categories and De Interpretatione*. Oxford: Clarendon Press, 1963.

Boehme, Harald. "Analysis bei Hegel". In: *Mathematische Semesterberichte* 61.2 (2014), S. 159–181.

Fraser, Craig G. "Joseph Louis Lagrange, Théorie des fonctions analytiques, (1797)". In: *Landmark Writings in Western Mathematics 1640-1940*. Elsevier, 2005, S. 258–276.

Grabiner, Judith V. *The origins of Cauchy's rigorous calculus*. Courier Corporation, 2012.

Hartmann, Klaus und Olaf L. Müller. *Hegels Logik*. Berlin u.a.: de Gruyter, 1999.

Hegel, Georg Wilhelm Friedrich. *Enzyklopädie der philosophischen Wissenschaften 1*. Bd. 8. Frankfurt am Main: Suhrkamp Verlag, 1986.

– *Jenaer Systementwürfe II: Logik, Metaphysik, Naturphilosophie*. Bd. 7. Felix Meiner Verlag, 1982.

– *Wissenschaft der Logik 1*. Bd. 5. Frankfurt am Main: Suhrkamp Verlag, 1986.

Kreis, Guido. *Negative Dialektik des Unendlichen: Kant, Hegel, Cantor*. suhrkamp taschenbuch wissenschaft. Berlin: Suhrkamp, 2015.

Lacroix, Alain. "The mathematical infinite in Hegel". In: *The philosophical forum*. Bd. 31. 3-4. Wiley Online Library. 2000, S. 298–327.

Lagrange, Joseph Louis. *Oeuvres de Lagrange: 3*. Paris: Gauthier-Villars, 1869.

Lakatos, Imre. "Unendlicher Regreß und Grundlagen der Mathematik". In: *Mathematik, empirische Wissenschaft und Erkenntnistheorie*. Springer, 1982, S. 3–22.

Maybee, Julie E. "Hegel's Dialectics". In: *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Hrsg. von Edward N. Zalta. Winter 2020. Metaphysics Research Lab, Stanford University, 2020.

Newton, Isaac. *Die mathematischen Prinzipien der Physik*. de Gruyter, 1999.

Nolasco, Fábio Mascarenhas. "Hegel's Critique of the Infinitesimal Calculus and Analytical Practice". In: *Hegel-Jahrbuch* 2015.1 (2015), S. 434–440.

Rödl, Sebastian. "Logic, Being and Nothing". In: *Hegel Bulletin* 40.1 (2019), S. 92–120.

Sonar, Thomas. *3000 Jahre Analysis: Geschichte-Kulturen-Menschen*. Springer-Verlag, 2016.

Studtmann, Paul. "Aristotle's Categories". In: *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Hrsg. von Edward N. Zalta. Spring 2021. Metaphysics Research Lab, Stanford University, 2021.

Thomasson, Amie. "Categories". In: *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Hrsg. von Edward N. Zalta. Summer 2019. Metaphysics Research Lab, Stanford University, 2019.

Wikisource. *The Analyst: a Discourse addressed to an Infidel Mathematician — Wikisource*, `https://en.wikisource.org/w/index.php?title=The_Analyst:_a_Discourse_addressed_to_an_Infidel_Mathematician&oldid=11206365`. [Online; accessed 7-September-2021]. 2021.

Wolff, Michael. "Hegel und Cauchy. Eine Untersuchung zur Philosophie und Geschichte der Mathematik". In: *Hegels Philosophie der Natur*. Bd. 15. Stuttgart: Klett-Cotta, 1986, S. 197–263.

Yeomans, Christopher und Ralph Kaufmann. "Hegel on Calculus". In: *History of Philosophy Quarterly* 34.4 (2017), S. 371–390.

Eigenständigkeitserklärung

Hiermit bestätige ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel benutzt habe. Die Stellen der Arbeit, die dem Wortlaut oder dem Sinn nach anderen Werken (dazu zählen auch Internetquellen) entnommen sind, wurden unter Angabe der Quelle kenntlich gemacht.